量子力学と相対性理論

岐阜大学医学部
桑田一夫

等価原理

ニュートンの第二法則

$$F = m_I a \quad ; \quad m_I\text{:慣性質量}$$

万有引力の法則

$$\mathrm{F} = \frac{GMm_G}{r^2} \quad ; \quad m_G\text{: 重力質量}$$

m_I と m_G は、10^{-8}の精度で一致する。
すなわち、重力と慣性力は区別できない。

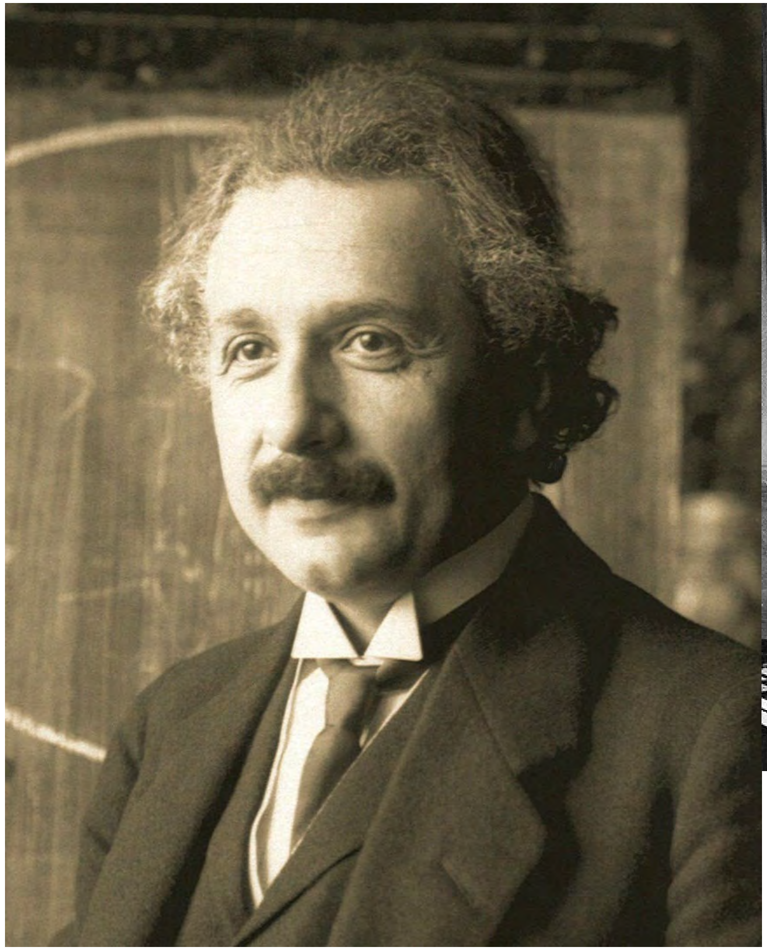
最小作用の原理

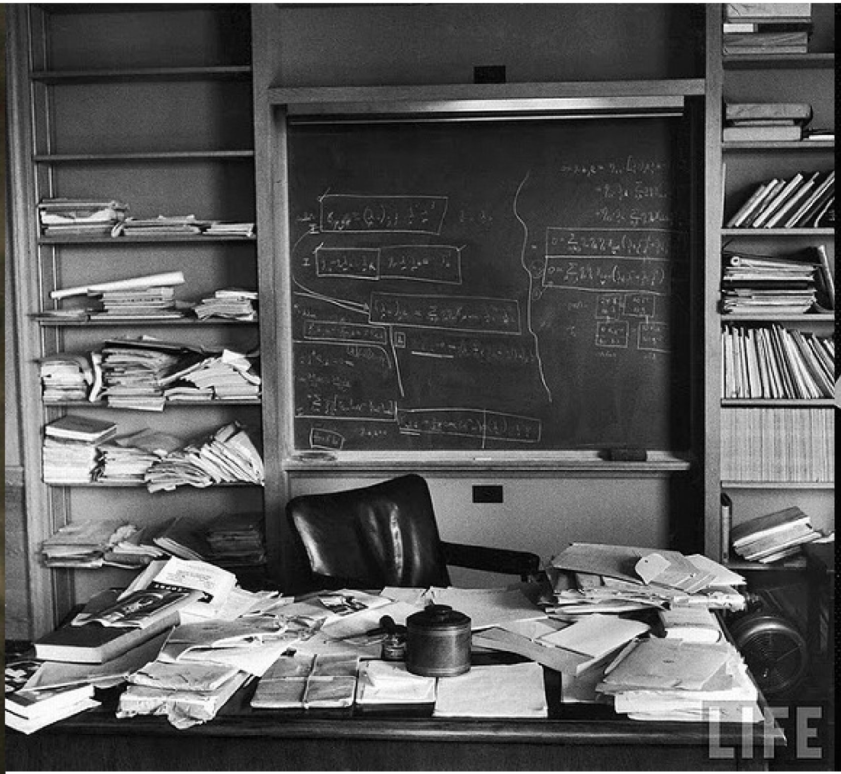
　速度をX/Tとすると、時刻 t での位置座標 x は、 $\mathrm{x}=\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{T}}t$ となる。

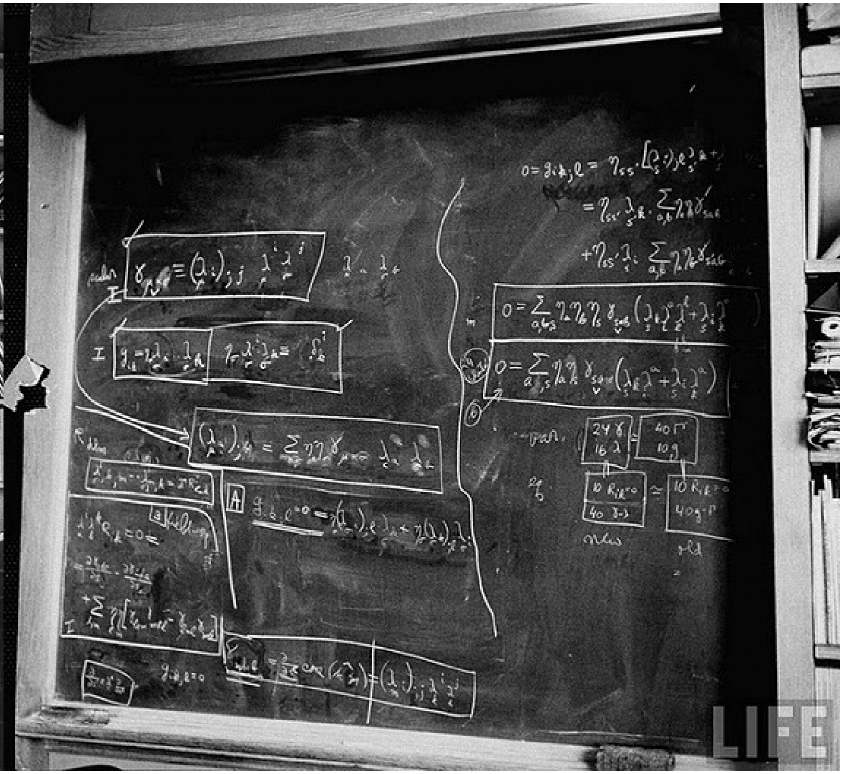
力が働いていない自由粒子の場合、一定の加速度aで、粒子が運動すると、 $\mathrm{x}=\mathrm{Vt}+\frac{1}{2}at^2$ となる。ここで、 $\mathrm{V}=\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}aT$ とおき、 t ＝ 0 からTまでの運動エネルギーの積分（作用）を考える。すると、

$\mathrm{S}=\int_0^T dt\,\frac{1}{2}m\,(V+at)^2=\frac{1}{2}m(\frac{X^2}{T}+\frac{1}{12}a^2T^3)$ 　となる。Sは、加速度aが０のとき、最小となる。即ち、ニュートンの運動方程式が成り立つのは作用が最小のときである。これを最小作用の原理という。

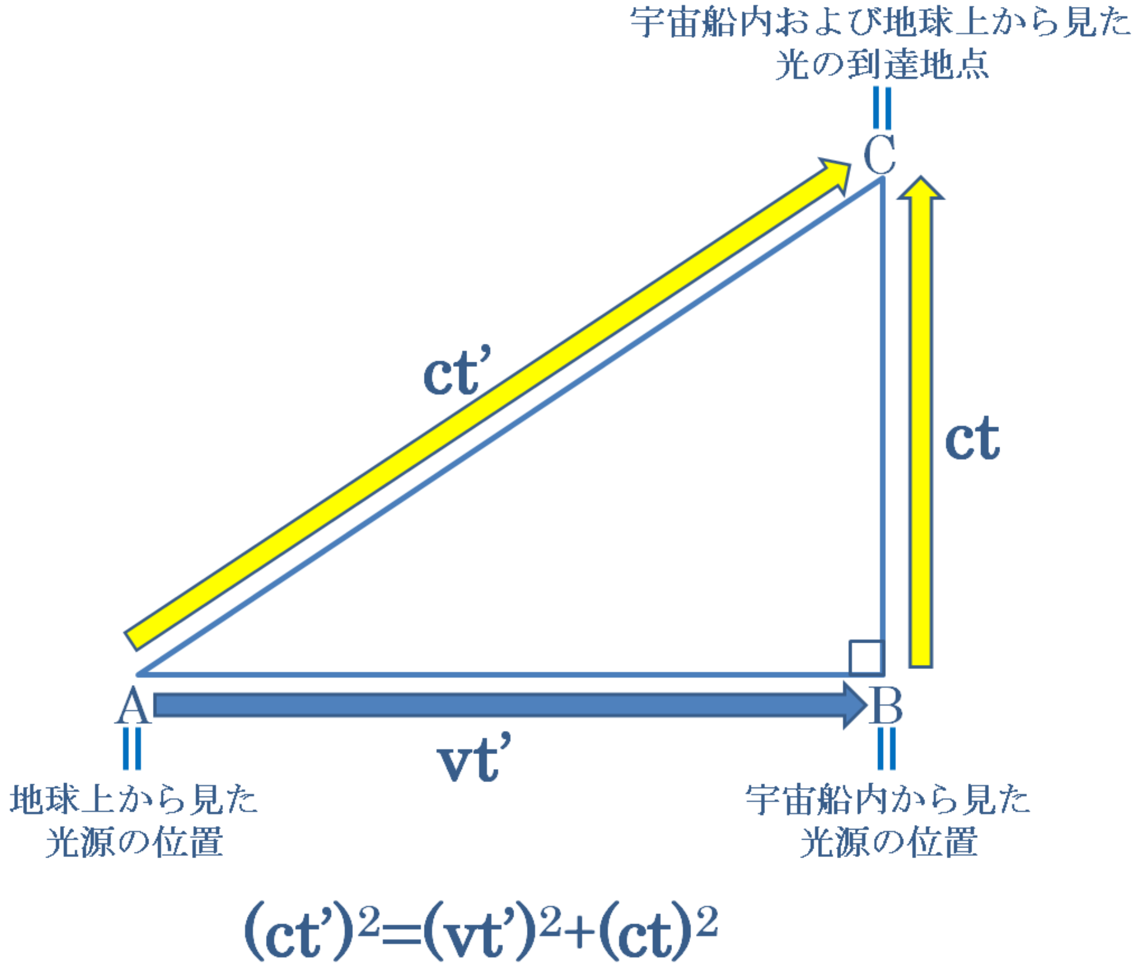
Albert Einstein







相対性理論：動いている物体の時間が遅れる。



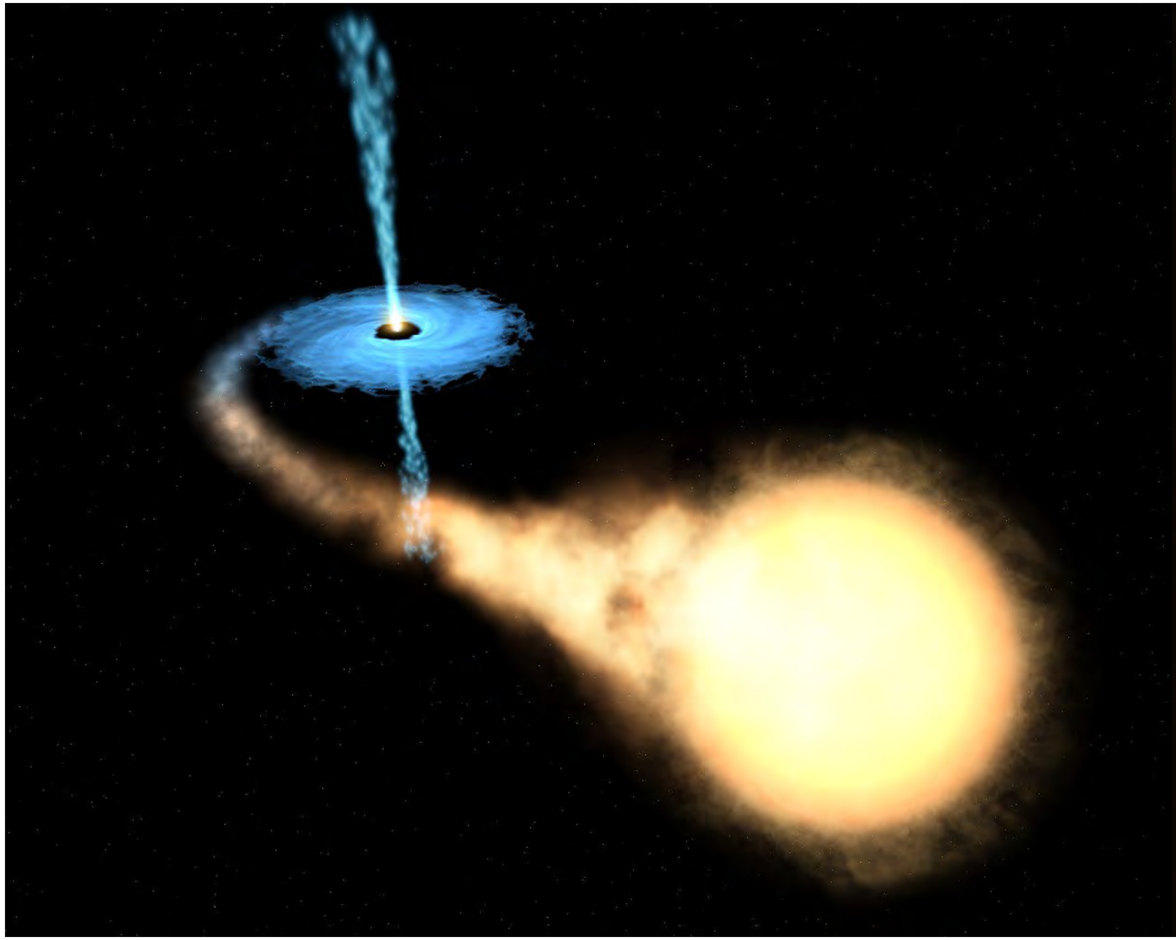
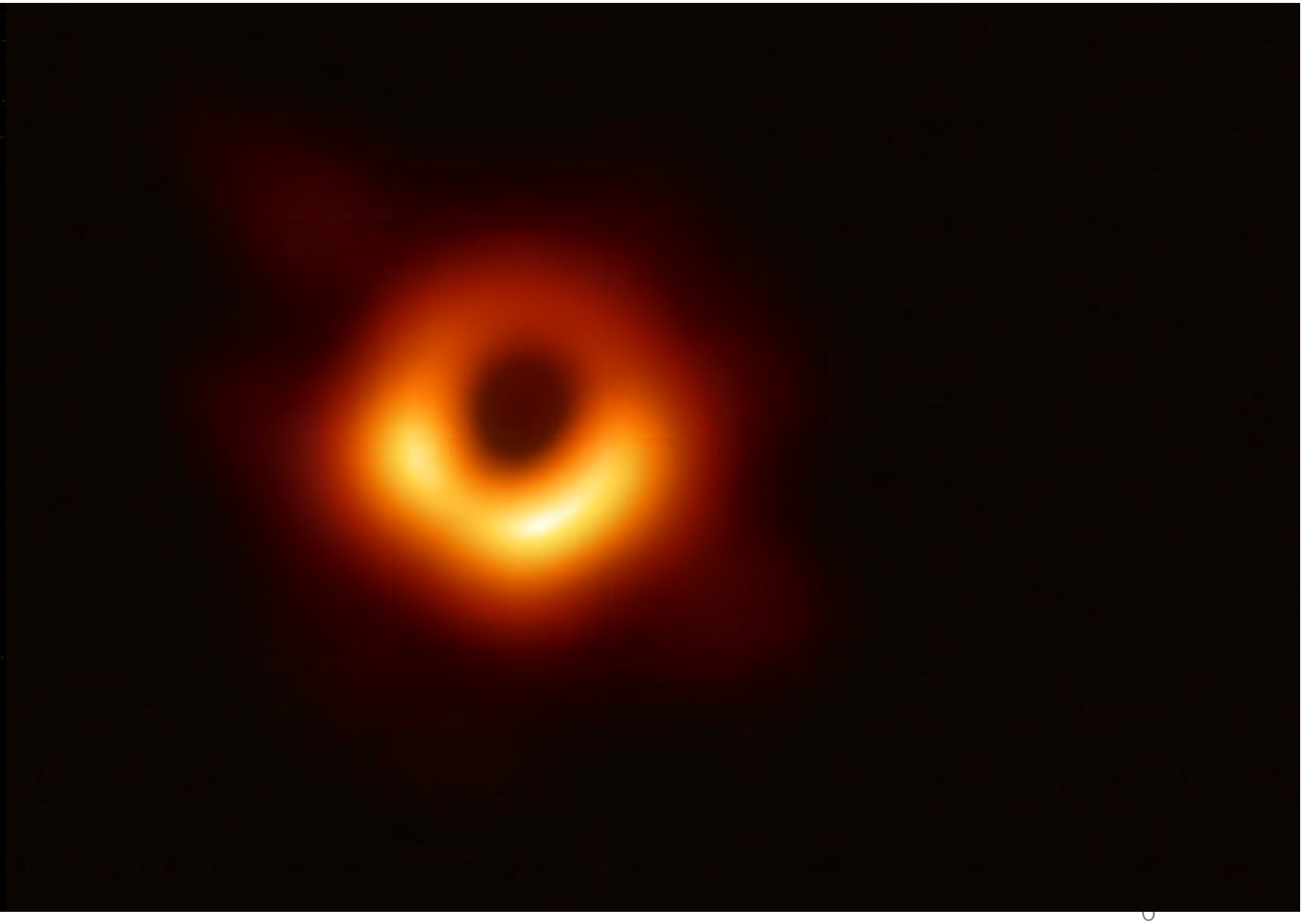
$$(ct')^2 = (vt')^2 + (ct)^2$$

$$(c^2 - v^2)t' = (ct)^2$$

$$t' = tc/(c^2 - v^2)^{1/2}$$

$$t = t'\ (c^2 - v^2)^{1/2}/c$$

一般相対性理論：
直径は約1000億km、質量は太陽の約65億倍

2点間の距離を、空間軸に時間軸を加えて、表現すると、

ds^2 =- c^2dt^2 + $\mathrm{d}x^2 + dy^2 + dz^{\ 2} = g_{ij}dx^idx^j$

極座標($x = rsin\theta cos\varphi, y = rsin\theta sin\varphi, z = rcos\theta$)
では、

ds^2 =- c^2dt^2 + $dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^{\ 2}$

中心の一点に重力が存在する場合、

gds^2 =- $e^{\nu}c^2dt^2$ + $e^{\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^{\ 2}$

とおくと、計量テンソルは、($x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$)

$g_{00} = -e^{\nu}, g_{11} = e^{\lambda}, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2sin^2\theta,$

$g^{00} = -e^{-\nu}, g^{11} = e^{-\lambda}, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{33} = \frac{1}{r^2sin^2\theta}$

クリストッフェル記号$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)$

リッチテンソル、$\mathrm{R}_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}$

スカラー曲率、 $\mathrm{R} = g^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu}$

アインシュタインテンソル、$\mathrm{G}^{\mu}_{\nu} = \mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathrm{R}$

を計算すると、 $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r}$

ここで、 $r_g = \frac{2GM}{c^2}$

Schwarzschild解

$$ds^2 =- \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} c^2 dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

直線上を進む光の場合、ds^2=0, $d\theta$ ＝0, dϕ=0 より、

$$0 =- \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} \mathrm{c}^2 dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} dr^2,\ \mathrm{d}t = \pm \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} dr,$$ 積分すると

$$t_{ab} = \int_a^b \frac{1}{c} \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} dr = \frac{1}{c} \int_a^b \frac{r}{r-r_g} dr = \frac{1}{c} \int_a^b \left(1 + \frac{r_g}{r-r_g}\right) dr$$

$$= \frac{1}{c} [r + r_g \log(r - r_g)]_a^b = \frac{1}{c} [(b-a) + r_g \log\left(\frac{b-r_g}{a-r_g}\right)]$$

aからbのルートは、r_gを超えることはできない。

経路積分

時刻t_Aに位置q_Aを出発し、時刻t_Bに位置q_Bに到達する粒子の運動を考える。系のラグランジアンを$\mathrm{L}(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}})$とすると、その作用は、

$$\mathrm{S[A,B]} = \int_{t_A}^{t_B} L(q,\dot{q})dt$$

ファインマンは状態Aから状態Bに遷移する量子力学的な確率振幅は、AからBへ行く全てのとりうる経路から寄与についての和をとった

$$\mathrm{K_{A\to B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{D}q e^{\frac{i}{\hbar}S[A,B]}$$

と表せることを見出した。ここで、$\int \mathrm{D}q$は、時間を$\Delta t = \frac{t_B - t_A}{N}, t_{j+1} = t_j + \Delta t, t_0 = t_A, t_N = t_B, q_j = q\ (t_j)$と分割し、多重積分の極限

$$\int \mathrm{D}q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{C} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j$$

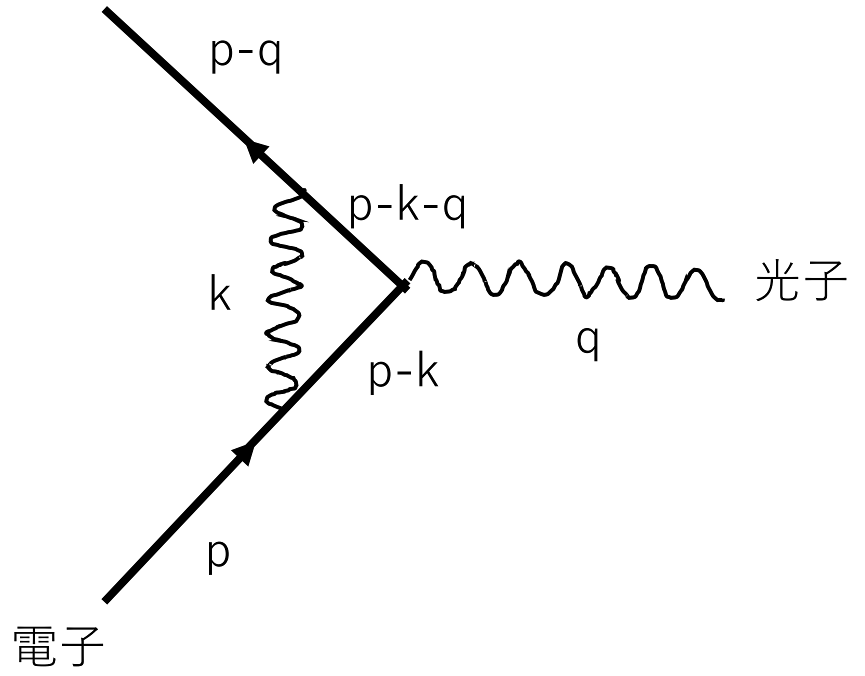
である。Cは、規格化因子で、ラグランジアンが、$\mathrm{L}[q,\dot{q}] = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q,t)$と表せるときは、$\mathrm{C} = \left(\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}\right)^{N/2}$である。

ファインマンダイアグラム

- **頂点**(verteces)：相互作用を表す。
- **線**：素粒子の伝搬を表す。ファインマン・ダイアグラムの線は粒子と反粒子を、矢印を用いて同時に表す。
  - **外線**(external lines)：ある頂点から出てそのままになっている線。考えている反応の始状態と終状態を表す。
  - **内線**(internal lines)：ある頂点から出て別の頂点に入っている線。ある頂点の相互作用で作られ、別の頂点の相互作用で消される粒子を表す。
- **時間軸**：時間軸がない場合は、頂点は時空間における点を表す。すなわち時空のあらゆる点（あらゆる場所、あらゆる時刻）での相互作用を表す図になっている。

ファインマンダイアグラム

電子が運動量qの光子を吸収ないし放出する際に、運動量 k の光子が、頂点をまたぐように放出・吸収されるプロセス（内線）を考える。

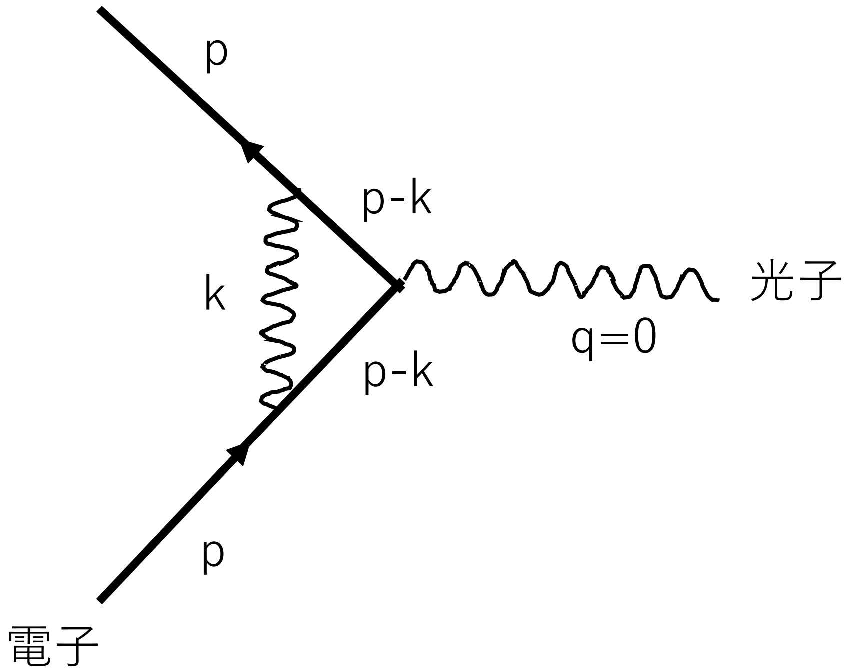


この経路の散乱振幅は、$\int dk^{\mu}(\text{定数}) \times S_f(p-k)D_f(k)S_f(p-k-q) \sim \int^{\infty} \frac{dk}{k}$ となり、対数発散する。

（$D_f(k) \sim O(k^{-2})$, $S_f(k) \sim O(k^{-1})$, $\mathrm{d}k \sim O(k^{-3})$ より）

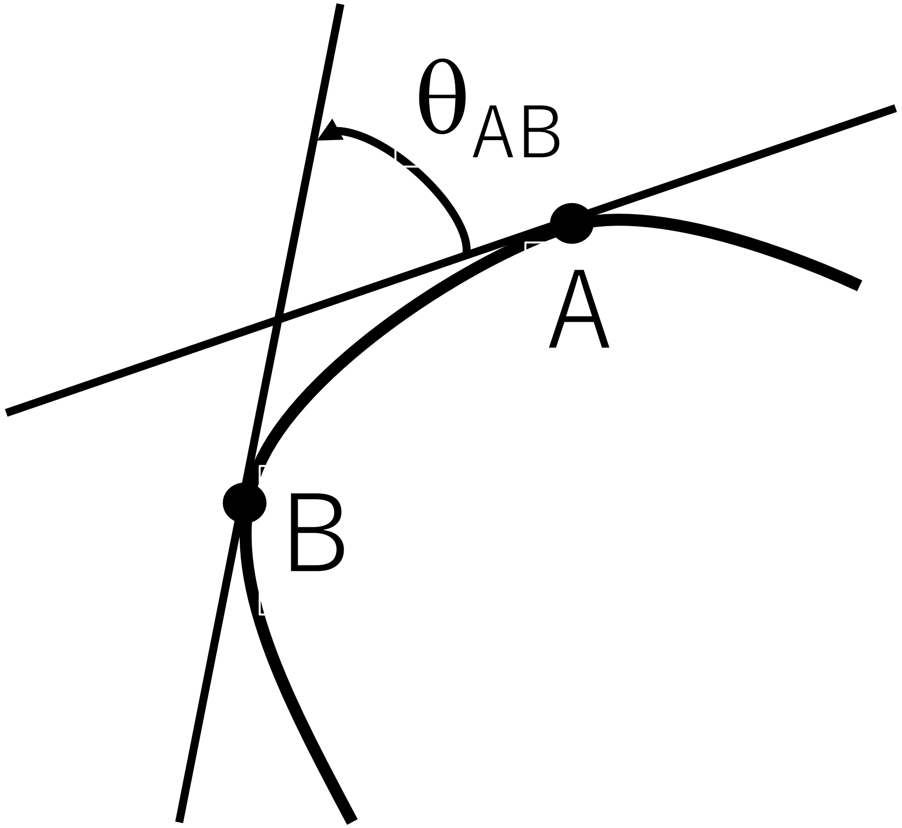
くりこみ理論

電子が運動量qの光子を吸収ないし放出しなくても既に発散している。だから、この無限大を差し引く必要がある。



この経路の散乱振幅は、$\int dk^{\mu}(\text{定数})\times S_f(p-k)D_f(k)S_f(p-k)\sim\int^{\infty}\frac{dk}{k}$,となるが、この寄与を前項から差し引くと、$\int dk^{\mu}(\text{定数})\times\left\{S_f(p-k)D_f(k)S_f(p-k-q)-S_f(p-k)D_f(k)S_f(p-k)\right\}\sim\int^{\infty}\frac{dk}{k^2}$、となり収束する。

曲率とは何か？



曲率：$\kappa = \lim_{B \to A} \frac{\theta_{AB}}{l_{AB}}$

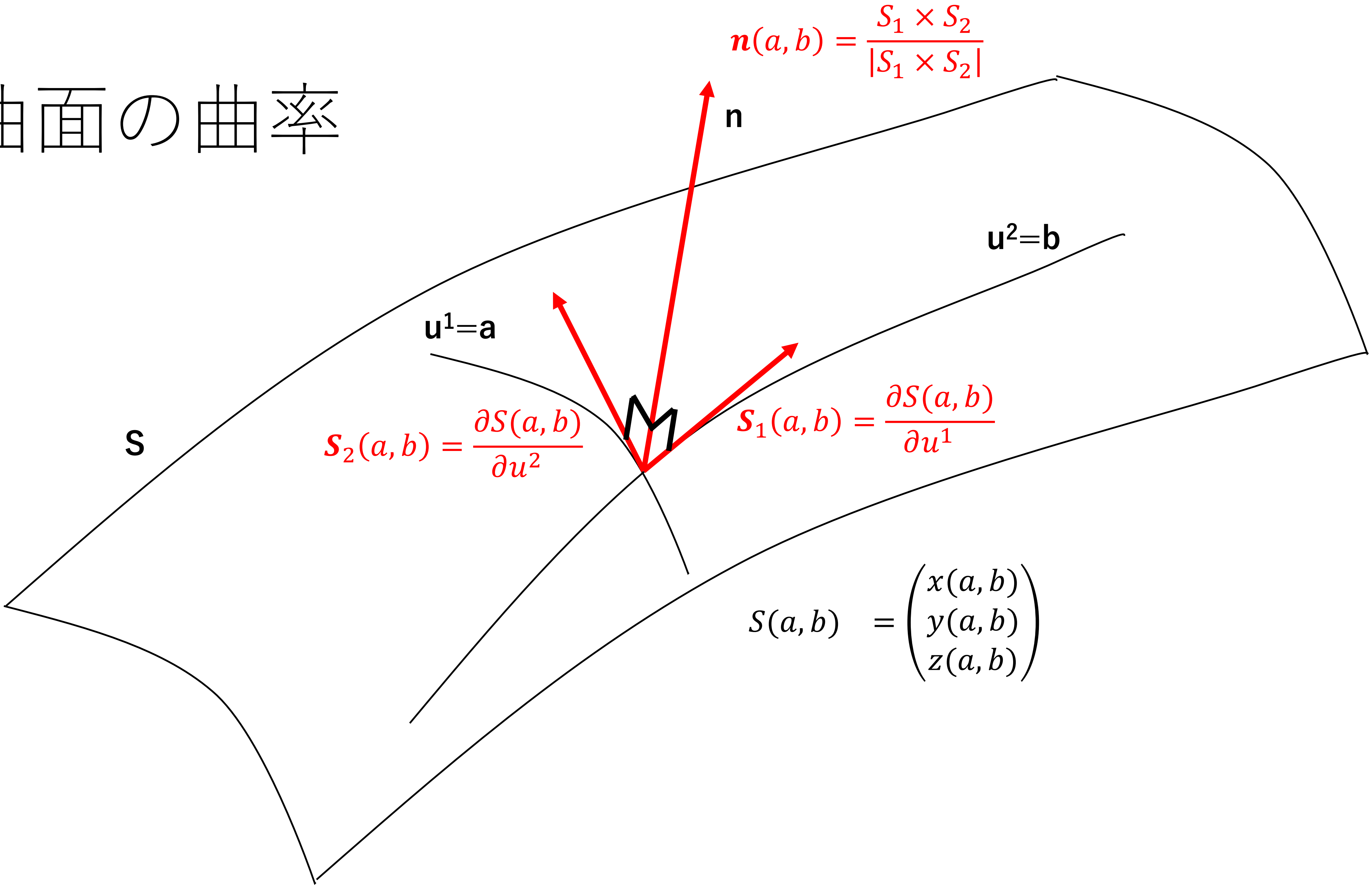
曲率半径：$\frac{1}{\kappa}$

円の場合、

$$\kappa = \lim_{B \to A} \frac{\theta_{AB}}{l_{AB}} = \lim_{B \to A} \frac{\alpha}{r\alpha} = \frac{1}{r}$$

曲率半径： r

曲面の曲率



$\boldsymbol{n}(a,b) = \frac{S_1 \times S_2}{|S_1 \times S_2|}$
n
$u^2=b$
$u^1=a$
$\boldsymbol{S}_2(a,b) = \frac{\partial S(a,b)}{\partial u^2}$
$\boldsymbol{S}_1(a,b) = \frac{\partial S(a,b)}{\partial u^1}$
S
$S(a,b) = \begin{pmatrix} x(a,b) \\ y(a,b) \\ z(a,b) \end{pmatrix}$

曲面の曲率の表現

曲面の曲率は、ガウス曲率で定義される。曲面が$S(u^1,u^2)$で表されたとき、

$\boldsymbol{S}_1(u^1,u^2)=\frac{\partial S(u^1,u^2)}{\partial u^1}$、$\boldsymbol{S}_2(u^1,u^2)=\frac{\partial S(u^1,u^2)}{\partial u^2}$とすると、

単位法線ベクトルは、$\mathrm{n}(u^1,u^2)=\frac{\boldsymbol{S}_1(u^1,u^2)\times\boldsymbol{S}_2(u^1,u^2)}{|\boldsymbol{S}_1(u^1,u^2)\times\boldsymbol{S}_2(u^1,u^2)|}$と表される。

このとき、$\boldsymbol{n}_1(u^1,u^2)=\frac{\partial n(u^1,u^2)}{\partial u^1}$、$\boldsymbol{n}_2(u^1,u^2)=\frac{\partial S(u^1,u^2)}{\partial u^2}$とすると、ガウス曲率は：$\kappa(u^1,u^2)=\frac{\boldsymbol{n}_1(u^1,u^2)\times\boldsymbol{n}_2(u^1,u^2)}{\boldsymbol{S}_1(u^1,u^2)\times\boldsymbol{S}_2(u^1,u^2)}$と表される。

また、$g_{ij}=S_i\cdot S_j$、$h_{ij}=n\cdot S_{ij}$、（$S_{ij}=\frac{\partial S_i}{\partial u^j}$）とおくと、

$$\kappa(u^1,u^2)=\frac{h_{11}h_{22}-h_{21}h_{12}}{g_{11}g_{22}-g_{21}g_{12}}$$ とも表される。

接平面内のベクトルと曲率との関係

$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_1 = 0$、 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_2 = 0$であるから、これをそれぞれu^2, u^{1}で微分する。 $\boldsymbol{n_2} \cdot \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_{21} = 0$、$\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_{12} = 0$

ここで、偏微分の順序は入れ換えてよいので、$\boldsymbol{S}_{21} = \boldsymbol{S}_{12}$である。

$h_{12} = n \cdot S_{12}$=-$n_1 \cdot S_2$=$n \cdot S_{21}$=$-n_2 \cdot S_1 = h_{21}$

同様にu^1, u^{2}で微分する。 $\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_{11} = 0$、$\boldsymbol{n_2} \cdot \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_{22} = 0$。

$h_{11} = n \cdot S_{11}$=-$n_1 \cdot S_1$、h_{22}=$n \cdot S_{22}$=$-n_2 \cdot S_2$

また、$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$　を用いて、

$h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}$=$(-n_1 \cdot S_1)(-n_2 \cdot S_2)$-$(-n_2 \cdot S_1)(-n_1 \cdot S_2)$

=$(n_1 \cdot S_1)(n_2 \cdot S_2)$-$(n_2 \cdot S_1)(n_1 \cdot S_2)$=$(n_1 \times n_2) \cdot (S_1 \times S_2)$

$g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}$=$(S_1 \cdot S_1)(S_2 \cdot S_2)$-$(S_2 \cdot S_1)(S_1 \cdot S_2)$=$(S_1 \times S_2) \cdot (S_1 \times S_2)$

ここで、$n_1 \times n_2 = \kappa(S_1 \times S_2)$なので、

$\frac{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}} = \frac{(n_1 \times n_2) \cdot (S_1 \times S_2)}{(S_1 \times S_2) \cdot (S_1 \times S_2)} = \boldsymbol{\kappa}$　となる。

リーマン曲率

クリストッフェル記号を$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^j u^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i}$、 $\frac{\partial x^l}{\partial u^j u^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^l}{\partial u^i}$と定義する。
この係数Γ_{jk}^iは、(x^1, x^2)でみた(u^1, u^2)の接続係数という。
また$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial u^l} + \Gamma_{kn}^i \Gamma_{lj}^n$-$\Gamma_{ln}^i \Gamma_{kj}^n$をリーマンの曲率テンソルという。
また、$R_{121}^1 = (h_{11}h_{12} - h_{21}h_{12})g^{21}$、$R_{121}^2 = (h_{11}h_{12} - h_{21}h_{12})g^{22}$であるので、
ここで、リーマン曲率：$\mathrm{R}_{2121} = g_{21}R_{121}^1$+$g_{22}R_{121}^2 = h_{11}h_{12}$-$h_{21}h_{12}$
であるから、ガウス曲率は、$\kappa(u^1, u^2) = \frac{R_{2121}}{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}}$となる。

アインシュタイン方程式

リーマン曲率テンソルを、リッチテンソルとスカラー曲率が求まる。

$$R^{\varrho}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\varrho}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma^{\varrho}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}} + \Gamma^{\varrho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\varrho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

とすると、リッチテンソルとスカラー曲率は、それぞれ

$$R_{\mu\nu} = R^{\varrho}_{\mu\varrho\nu}$$
$$R \quad = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

と表される。このとき、アインシュタインテンソルで、物質分布が定まる。

$$G_{\mu\nu} = \mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi\mathrm{G}}{c^4}T_{\mu\nu}$$

ここで、$G_{\mu\nu}$はアインシュタインテンソル、$\mathrm{R}_{\mu\nu}$はリッチの曲率テンソル$g_{\mu\nu}$は計量テンソル、Rはスカラー曲率：$\mathrm{R} = g^{ij}R_{ij}$、$T_{\mu\nu}$は、エネルギー・運動量テンソルである。

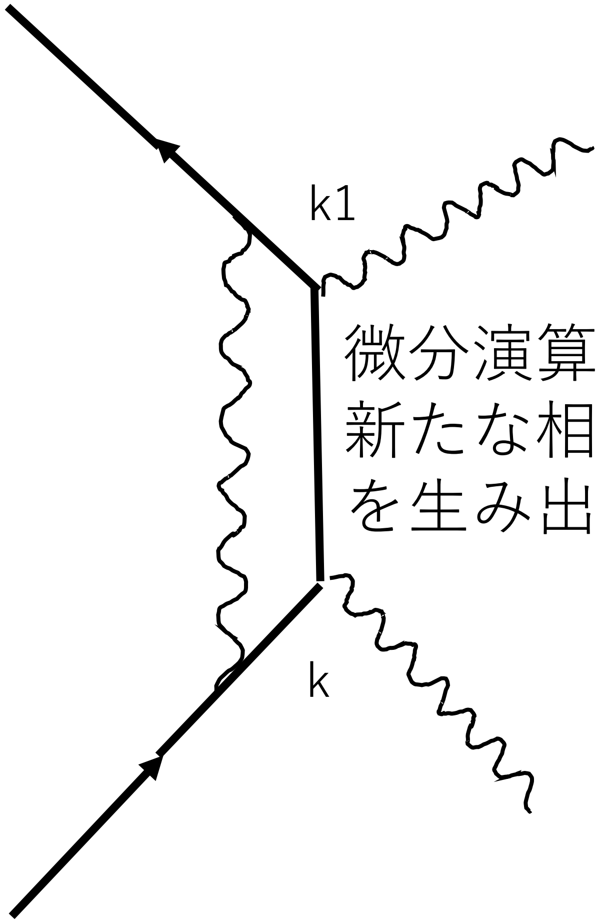
一般相対性理論の基本方程式は、

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

であり、$\kappa = -\frac{8\pi\mathrm{G}}{c^4}$ である（Gは万有引力定数、 cは光速を表す）。ここで、左辺は時空の曲率を表し、右辺は物質の分布を表す。

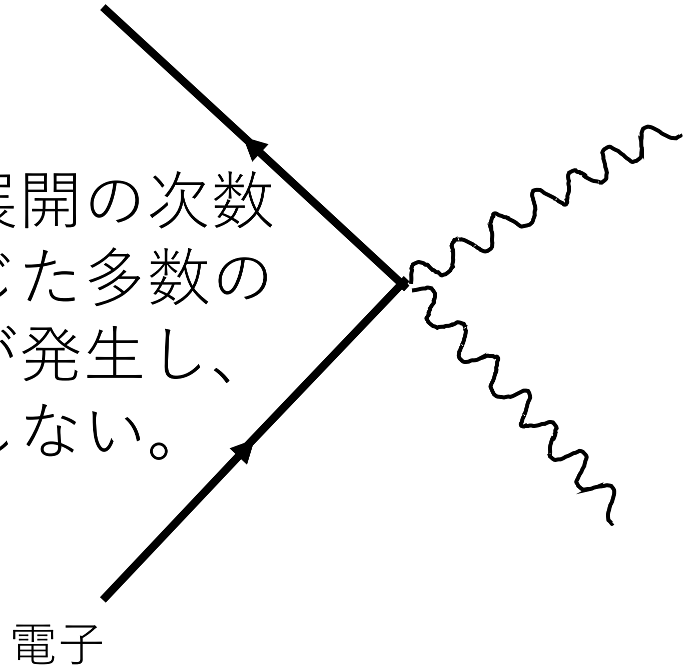
右辺のエネルギー運動量テンソルが増加すると（アインシュタインの特殊相対論によるとエネルギーと質量は等価であるから、エネルギー運動量テンソルの増加は質量の増加を意味する）、左辺も増加する。これは時空の曲率が増加することを意味する。重力とは時空の湾曲によるものであったから、曲率の増加は重力の増大を表す。右辺のエネルギー運動量テンソルの増大は質量が増大する事を表し、この方程式によると、それは左辺の時空の曲率、つまり重力の増大を意味する。

微分を含む相互作用の取り扱い



微分演算子は、
新たな相互作用
を生み出す。

摂動展開の次数
に応じた多数の
光子が発生し、
収束しない。



超ひも理論とRiemannζ関数

物質が、点でなく、ひもとすると、ひもの零点振動のエネルギーは、次式で与えられる。

$$A = \frac{D-2}{2}\sum_{j=1}^{\infty} j$$

ここで、リーマンゼータ関数を以下のように定義する。

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}$$

$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ であるので、$A = \frac{D-2}{2}\sum_{j=1}^{\infty} j = \frac{D-2}{2}\zeta(-1) = \frac{D-2}{24}$

A=-1になるためには、D=26が得られる。

Riemann ζ 関数

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} n^{-s}$$

ここで、$\bar{\zeta}(s) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$ とおく。

$\bar{\zeta}(s) = (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots)$-$2(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s}\cdots)$

$= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots)$-$\frac{2}{2^s}(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots)$

$= (1 - 2^{1-s}) \quad \zeta(s)$

$\bar{\zeta}(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = -3\zeta(-1)$

ここで、$1 - x + x^2 - x^3 \cdots = \frac{1}{1+x}$ 、$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$ である

から、ここでx=1とおくと、$\bar{\zeta}(-1) = \frac{1}{4}$。従って、$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$